

《数学分析》讲稿

复旦大学 陈纪修

一、《数学分析》这门课程

《数学分析》是一门对数学系的学生讲授微积分的课程。

微积分是人类思维最伟大的成果之一，是人类文明史上一颗光辉灿烂的明珠。

任何一门学科的产生与发展，都离不开外部世界的推动。任何科学技术的发展都与时代的发展密切相关。微积分的产生也是受到了物理学、天文学、几何学等学科发展的推动。

牛顿与莱布尼兹的最大贡献在于发现了微分与积分之间的深刻联系，从而使微积分成为一门学科。

科学技术的发展历史告诉我们，人类的任何一个伟大的发明与创造，都是站在巨人的肩膀上取得的。

通过学习《数学分析》，希望做到：

- (1) 掌握微积分的思想与原理、掌握微积分的核心内容与精髓；
- (2) 加强逻辑思维能力的训练与培养，提高数学推理与论证的能力；
- (3) 通过严格的训练，具备熟练的运算能力与技巧；
- (4) 重视微积分的应用，掌握数学模型的思想与方法，提高应用微积分这一有力的数学工具分析问题、解决问题的能力。

二、微积分的发现与发展历程

1. 极限、无穷小、微分、积分的思想在中国古代早已有之

公元前 4 世纪，中国古代思想家和哲学家庄子在《天下篇》中论

述：“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。”其中大一和小一就是无穷大和无穷小的概念。而“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”更是道出了无限分割的极限思想。

公元 3 世纪，中国古代数学家刘徽首创的割圆术，即用无穷小分割求面积的方法，就是古代极限思想的深刻表现。他用圆内接正多边形的边长来逼近圆周，得到了

$$3.141024 < \pi < 3.142704 ,$$

并深刻地指出：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

我国南北朝时期的数学家祖暅（中国古代数学家祖冲之之子）发展了刘徽的思想，在求出球的体积的同时，得到了一个重要的结论（后人称之为“祖暅原理”）：“夫叠基成立积，缘幂势既同，则积不容异。”用现在的话来讲，一个几何体（“立积”）是由一系列很薄的小片（“基”）叠成的；若两个几何体相应的小片的截面积（“幂势”）都相同，那它们的体积（“积”）必然相等。

2. 十七世纪前微分学与积分学的发展历史

公元前 5 世纪，古希腊数学家安提丰（Antiphon）在研究化圆为方问题时创立了“穷竭法”，认为圆内接正多边形当边数不断增加，最后多边形就与圆相合。

公元前 2 世纪，古希腊数学家阿基米德（Archimedes）对“穷竭法”作出了最巧妙的应用，他在《论抛物线求积法》中用“穷竭法”求抛物弓形的面积，他构造一系列三角形使它们的面积和不断接近抛

物弓形的面积，这就是极限理论的最初形式。在《论球和柱体》一书中，阿基米德首先得到了球和球冠的表面积、球和球缺的体积的正确公式。阿基米德的著作代表了古希腊数学的顶峰。

1615年，德国数学家开普勒（J. Kepler, 1571-1630）用无穷小微元来确定曲边形的面积与体积。他把圆看作边数无限多的多边形，圆周上每一点看作是顶点在圆心高等于半径的极小等腰三角形的底，于是圆面积就等于圆周长与半径乘积之半。他把球看作面数无限多的多面体，球面上每一点看作是顶点在球心高等于半径的极小圆锥的底，于是球体积就等于球表面积与半径乘积之三分之一。他还用无穷小方法精确地计算出酒桶的体积，并写了《测量酒桶体积的新科学》，书中包含了87种不同的旋转体的体积计算。

开普勒最重要的贡献是提出了行星运行三大定律：(1)行星在椭圆轨道上绕太阳运动，太阳在此椭圆的一个焦点上。(2)从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积。(3)行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。可以说这是天文学上划时代的贡献，也是数学史上重要的里程碑。牛顿就是应用开普勒的行星运行三大定律，通过严格的数学推导，发现了万有引力定律。为了确定第二定律，Kepler将椭圆中被扫过的那部分图形分割成许多小的“扇形”，并近似地将它们看成一个个小的三角形，运用了一些出色的技巧对它们的面积之和求极限，成功地计算出了所扫过的面积。在其卓有成效的工作中，已包含了现代定积分思想的雏形。

微分学主要来源于两个问题的研究：曲线的切线问题与函数的极

大、极小问题。法国数学家**费尔马** (P. Fermat, 1744-1825) 在这两个问题上作出了主要贡献。费尔马在处理这两个问题时，都是先对自变量取增量，再让增量趋于零，这就是微分学的本质所在。费尔马也在积分学方面做了许多工作，如求面积、体积、重心等问题。但可惜的是他没有发现微分学与积分学这两类问题之间的基本联系。

另一位已经走到了微积分基本定理的门口的是英国数学家**巴罗** (I. Barrow, 1630-1677)，他是牛顿的老师，是剑桥大学卢卡斯讲座教授，后来他认为牛顿已经超过了他，就把这一讲座教授的位置让给了牛顿。他在《光学和几何学讲义》一书中，已经把曲线的切线与曲线的求积问题联系了起来，也就是说，他把微分学和积分学的两个基本问题以几何对比的形式联系了起来。

3. 牛顿和莱布尼兹对微积分学科的功绩

微积分学科的建立，归功于两位伟大的科学先驱：**牛顿和莱布尼兹**。关键在于他们认识到，微分和积分这两个运算，是彼此互逆的两个过程，它们是由牛顿—莱布尼兹公式联系起来的。

1669年英国大数学家**牛顿** (I. Newton, 1643-1727) 提出微积分学说存在正反两个方面的运算，例如面积计算和切线斜率计算就是互逆的两种运算，即微分和积分互为逆运算，从而完成了微积分运算的决定性步骤。1687年，牛顿发表了著作《自然哲学的数学原理》，在这个划时代的著作中，他陈述了他的伟大创造—微积分，并应用微积分理论，从开普勒关于行星的三大定律导出了万有引力定律。牛顿还将微积分广泛应用于声学、光学、流体运动等学科，充分显示了微

积分理论的巨大威力。

牛顿是人类历史上最伟大的数学家之一。英国著名诗人**波普** (Pope) 是这样描述牛顿的：

自然和自然的规律
沉浸在一片混沌之中，
上帝说，生出牛顿，
一切都变得明朗。

牛顿本人却很谦虚：“我不知道世间把我看成什么人，但是对我自己来说，就象一个海边玩耍的小孩，有时找到一块比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳，感到高兴，而在我面前是未被发现的真理的大海。”

1673年德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646-1716) 也致力于研究切线问题和面积问题，并探索两类问题之间的关系。

牛顿和莱布尼兹对微积分的研究都达到了同一目标，但两人的方法不同。牛顿发现最终结果比莱布尼兹早一些，但莱布尼兹发表自己的结论比牛顿早一些。关于谁是微积分的创始者，英国数学家与欧洲大陆的数学家经历了一场旷日持久的论战。

正是由于牛顿和莱布尼兹的功绩，微积分成为了一门独立的学科；也正是由于牛顿和莱布尼兹的功绩，求微分与求积分的问题，不再是孤立地进行处理了，而是有了统一的处理方法。

微积分的产生历史，说明了这样一个真理：人类科技发展史上的任何一个进步，都是站在巨人的肩膀上取得的。牛顿说他就是站在巨

人的肩膀上，在当时这个巨人已经形成，这个巨人包括了一大批微积分的先驱们，如：阿基米德、开普勒、费尔马、巴罗等数学家。

微积分的诞生具有划时代的意义，是数学史上的分水岭与转折点，是人类探索大自然的艰苦努力的一项伟大的成功，是人类思维的最伟大的成就之一。

关于微积分的地位，恩格斯这样评论：“在一切理论成就中，未必再有什么象 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里。”

微积分诞生后，数学引来了一次空前的繁荣时期。18 世纪被称为数学史上的英雄世纪。数学家们把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域，获得了丰硕的成果。在数学本身，他们把微积分作为工具，又发展出微分方程、无穷级数等理论分支，大大扩展了数学研究的范围。

4. 微积分严格理论体系的完善

微积分建立之后，出现了两个极不协调的情景；一方面是微积分广泛应用于各个领域，取得了辉煌的成就；另一方面是人们对于微积分的基本概念的合理性提出了强烈的质疑。19 世纪以前，无穷小量概念始终缺少一个严格的数学定义，因此导致了相当严重的混乱。1734 年英国哲学家红衣主教贝克莱（G. Berkeley, 1685-1753）对微积分基础的可靠性提出强烈质疑，从而引发了第二次数学危机。

为了克服微积分运算在逻辑上的矛盾，为微积分学科建立严格的

数学基础，数学家们又经历了长期而艰苦的努力：

法国数学家达朗贝尔 (J. R. d'Alembert, 1717-1783) 用极限方法取代无穷小量方法；

法国数学家柯西 (L. Cauchy, 1780-1857) 在达朗贝尔通俗化的极限基础上，从变量和函数角度出发，给出极限的明确定义，从而把微积分的基础严格地奠定在极限概念之上。

德国数学家魏尔斯特拉斯 (K. Weierstrass, 1815-1897) 用静态的 $\varepsilon-\delta$ 语言来刻画动态的极限与连续概念，使极限的定义达到了最清晰最严密的程度，直到如今人们仍然在使用他的定义。

由于严格的极限理论的建立，无穷小量可用极限的语言清楚地加以描述，这才解决了有关的逻辑困难。而且由于 $\varepsilon-\delta$ 语言的建立，又使得微积分的发展如虎添翼。

极限概念严格化以后，余下的事情就是要建立实数理论，因为极限概念需要以实数理论为前提。由于实数具有连续性，所以才能以实数系作为平台，在这个平台上展开微积分的理论。这方面的工作是由德国数学家康托尔 (G. Cantor, 1845-1918)、戴特金 (R. Dedekind, 1831-1916) 等一批数学家完成的。

三. 谈谈数学分析中的几个问题

1. 有理数系与实数系

(1) 学生经常会问，有理数与无理数哪个多？两个无限集，如何比较他们的元素的多少？

当集合元素个数是无穷大时，考虑两集合中元素“多”和“少”

的问题，正确的方法是采用一一对应的概念。

若集合 A 与集合 B 之间的元素能建立一一对应，则称集合 A 与集合 B 是“对等”的，或称它们的势是相等的，记为 $A \sim B$ 。

Bernstein 定理 设 A 与 B 是两个集合，如果 A 对等于 B 的一个子集， B 又对等于 A 的一个子集，则 A 与 B 对等。

(2) 可列集的概念。

一个无限集中的元素可以按某种规律排成一个序列，或者说，这个集合可表示为

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

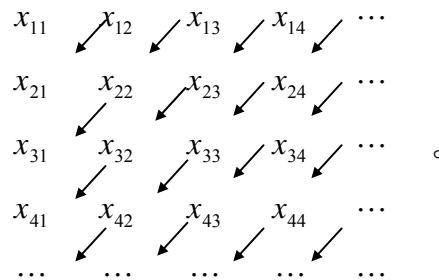
则称其为**可列集**。即可列集可以与正整数集合建立一一对应。

定理 1 可列个可列集之并也是可列集。

证 对任意 $n \in \mathbf{N}^+$ ，设 A_n 可表示为

$$A_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nk}, \dots\},$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素全体可排成如下的无穷方块阵：



把所有这些元素排成一列的规则可以有許多，常用的一种称为**对角线法则**：从最左面开始，顺着逐条“**对角线**”（图中箭头所示）将元素按从右上至左下的次序排列，也就是把所有的元素排列成

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, \dots$$

这样的规则保证了不会遗漏一个元素。

(3) 有理数集合是可列集，有理数集合具有稠密性。

定理 2 有理数集 \mathbf{Q} 是可列集。

证 由于区间 $(-\infty, +\infty)$ 可以表示为可列个区间 $(n, n+1]$ ($n \in \mathbf{Z}$) 的并，我们只须证明区间 $(0, 1]$ 中的有理数是可列集即可。

由于区间 $(0, 1]$ 中的有理数可唯一地表示为既约分数 $\frac{q}{p}$ ，其中 $p \in \mathbf{N}^+$ ， $q \in \mathbf{N}^+$ ， $q \leq p$ ，并且 p, q 互质。我们按下列方式排列这些有理数：

分母 $p=1$ 的既约分数只有一个： $x_{11}=1$ ；

分母 $p=2$ 的既约分数也只有一个： $x_{21}=\frac{1}{2}$ ；

分母 $p=3$ 的既约分数有两个： $x_{31}=\frac{1}{3}$ ， $x_{32}=\frac{2}{3}$ ；

分母 $p=4$ 的既约分数也只有两个： $x_{41}=\frac{1}{4}$ ， $x_{42}=\frac{3}{4}$ ；

.....

一般地，分母 $p=n$ 的既约分数至多不超过 $n-1$ 个，可将它们记为 $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk(n)}$ ，其中 $k(n) \leq n-1$ 。

于是区间 $(0, 1]$ 中的有理数全体可以排成

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk(n)} \dots \circ$$

这就证明了有理数集 \mathbf{Q} 是可列集。有理数集 \mathbf{Q} 的“测度”为零。

(4) 实数集合是不可列集，实数集合具有连续性。

定理 3 实数集 \mathbf{R} 是不可列集。

证 只要证明区间 $[0, 1)$ 中的实数是不可列的。先将区间 $[0, 1)$ 中的实数表示成无限小数，注意无限小数 $0.a_1a_2 \dots a_p 000 \dots$ ($a_p \neq 0$) 与无限小

数 $0.a_1a_2\cdots(a_p-1)999\cdots$ 是相等的，为了保持表示的唯一性，我们约定在无限小数表示中不出现后者。这样，区间 $[0,1)$ 中的任何一个实数就可以由一个确定的无限小数来表示。

我们采用反证法。设区间 $[0,1)$ 中的实数可排列成 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 。然后我们设法找出区间 $[0,1)$ 中的一个实数，它不在这个序列中。设

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots, \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots, \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots, \\ &\cdots\cdots \\ x_k &= 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}\cdots, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

取 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots b_k\cdots$, $1 \leq b_i \leq 9$, $i = 1, 2, 3, \cdots$, 其中 $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $\cdots\cdots$, $b_k \neq a_{kk}$, $\cdots\cdots$, 且要求在 $\{b_n\}$ 中至少有一项不等于 9, 则 b 必在区间 $[0,1)$ 中, 但不在这个序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中。

注 上述方法称为 Cantor 对角线法 (Cantor 是集合论的创始者)。

2、数学分析中两个重要的常数 π 和 e

英国哲学家罗素 (Bertrand Russell) 曾经说过: 数学里不仅有很多真理, 而且有着极致的美。这种美冷峻如雕塑, $\cdots\cdots$, 它极纯净, 能够向我们展示只有最伟大的艺术才具有的完美。

π 和 e 是《数学分析》课程中最重要的两个常数, 课程中包含了关于这两个常数丰富的内容, 也得到了许多漂亮的结果。学生了解这两个常数在数学中的地位, 并从这两个常数体会到数学的“美”, 对

于提高学习兴趣,提高学习效果,具有重要的意义。

(1) 常数 π

例 2 由函数的幂级数展开

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots, \quad x \in [-1, 1],$$

以 $x=1$ 代入, 可得到

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

例 3 $f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数展开为

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx,$$

令 $x = \pi$, 可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}; \quad (2)$$

令 $x = 0$, 可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}. \quad (3)$$

由它还可以导出

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (4)$$

例 4 利用函数的幂级数展开与无穷乘积展开, 可以得到

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right),$$

由此式出发可以得到

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2 \pi^2} + \frac{1}{2} \frac{x^4}{n^4 \pi^4} + \dots \right).$$

将上式右边等式相比较, 它们的 x^2 系数, x^4 系数都对应相等, 于是就得到等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (5)$$

(2) 常数 e

定理 4 数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ 单调增加, $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$ 单调减少, 两者收敛

于同一极限。

证 记 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_k > 0, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

得到

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left[\frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \right]^{n+1} = x_{n+1},$$
$$\frac{1}{y_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 \leq \left[\frac{(n+1) \frac{n}{n+1} + 1}{n+2} \right]^{n+2} = \frac{1}{y_{n+1}}.$$

这表示 $\{x_n\}$ 单调增加, 而 $\{y_n\}$ 单调减少。又由于

$$2 = x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1 = 4,$$

可知 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛。由 $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 它们具有相同的极限。通

常用字母 e 来表示这一极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

例 5 设 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 则数列 $\{b_n\}$ 收敛。

证 由

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

得到

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

于是有

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} < 0,$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n$$

$$= \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

这说明数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界，从而收敛。

$\{b_n\}$ 的极限 $\gamma = 0.57721566490\dots$ 称为 Euler 常数。

例6 设 $d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ，由于

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma \quad (n \rightarrow \infty),$$

和

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \ln 2n \rightarrow \gamma \quad (n \rightarrow \infty),$$

考虑 $b_{2n} - b_n$ ，用 b_{2n} 中的第 $2k$ 项与 b_n 中的第 k 项 ($k = 1, 2, \dots, n$) 对应相

减，得到

$$b_{2n} - b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} - \ln 2 = d_{2n} - \ln 2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于 $d_{2n+1} = d_{2n} - \frac{1}{2n+1}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ ，于是得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] = \ln 2,$$

也就是

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots = \ln 2. \quad (6)$$

复旦大学数学分析课程网站地址：

http://math.fudan.edu.cn/math_anal

复旦大学数学分析课程全程录象网址：

<http://202.120.227.42:82> — 整学期精品课程 — 2006 年国家精品课程